

# Kapitel 4

## BEC

Unter einem Bose-Einstein Kondensat (engl *Bose-Einstein Condensate*, *BEC*) versteht man einen Vielteilchenzustand identischer Bosonen bei dem ein bestimmter Einteilchenzustand – meist der Einteilchengrundzustand – makroskopisch besetzt ist, die anderen Einteilchenzustände hingegen thermisch. Das Kondensat bildet sich in einem Phasenübergang zweiter Ordnung, wenn die Temperatur unter den Wert einer kritischen Temperatur  $T_c$  fällt. Bemerkenswert ist dabei, dass die Bose-Einstein Kondensation bereits in einem idealen – das heißt nicht-wechselwirkenden – System auftritt. Im Unterschied zu andern Phasenübergängen zweiter Ordnung – der Ferromagnetismus etwa – ist einzig und allein die Symmetrie der Wellenfunktion für diesen Phasenübergang verantwortlich. Ursprünglich vorausgesagt durch Satyandra Nath Bose,<sup>1</sup> wurden Bose-Einstein Kondensate in nahezu idealer Form erstmals Mitte der 1990er Jahre in verdünnten Alkaligasen realisiert.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Z. Phys. **26**, 178 (1924).

<sup>2</sup>Für  $^{87}\text{Rb}$  durch die Gruppe von Carl Wieman und Eric Cornell am JILA (Andersen et al., Science **269**, 198 (1995)); für  $^{23}\text{Na}$  in der Gruppe von Wolfgang Ketterle am MIT (Davis et al.,

Wir konzentrieren uns hier auf Spin-0 Bosonen im Tieftemperaturzustand, also  $T \ll T_c$ , vereinfachend  $T = 0$ . Das System, bestehend aus  $N$  Bosonen im Volumen  $V$ , sei hinreichend verdünnt, so dass die Reichweite der inter-atomaren Wechselwirkung viel kleiner ist als der mittlere Teilchenabstand,

$$r_0 \ll (V/N)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.1)$$

In diesem Regime spielen Drei-Körperstöße keine Rolle, und der Hamiltonoperator, in zweiter Quantisierung, ist von der Form

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\Psi}(x) d^3x + \frac{1}{2} \iint \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}^\dagger(x') V(x, x') \hat{\Psi}(x') \hat{\Psi}(x) d^3x' d^3x \quad (4.2)$$

wobei die Feldoperatoren der Bose-Algebra genügen,

$$[\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}^\dagger(x')] = \delta^{(3)}(x - x'), \quad (4.3)$$

$$[\hat{\Psi}(x), \hat{\Psi}(x')] = [\hat{\Psi}^\dagger(x), \hat{\Psi}^\dagger(x')] = 0. \quad (4.4)$$

Translationsinvarianz bzw Homogenität legt eine Entwicklung nach ebenen Wellen nahe. Im kubischen Volumen  $V = L^3$ , mit periodischen Randbedingungen

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{V}} \hat{a}_k \quad \text{bzw.} \quad \hat{a}_k = \int_V \hat{\Psi}(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{V}} d^3x. \quad (4.5)$$

---

Phys. Rev. Lett. **75**, 2969 (1995). Etwa zeitgleich gab es Hinweise für Kondensation in <sup>7</sup>Li, obwohl in diesem System die Streulänge negativ ist. Kondensation des ursprünglichen Favoriten – das war spinpoloartierter Wasserstoff – gelang drei Jahre später in der Gruppe von Kleppner (Phys. Rev. Lett. **81**, 2811 (1998)).

Die Algebra der Felooperatoren (4.3), (4.4) impliziert die Bose-Algebra der Leiteroperatoren

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (4.6)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0. \quad (4.7)$$

Angedrückt in Leiteroperatoren liest sich der Hamiltonoperator (4.2)

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2V} \sum_{k_1, k_2, q} \tilde{V}_q \hat{a}_{k_1+q}^\dagger \hat{a}_{k_2-q} \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_1} \quad (4.8)$$

worin  $\tilde{V}_q$  die Fouriertransformierte des WW-Potential zum Impulsübertrag  $\hbar q$ ,  $\tilde{V}_q = \int V(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r$ .

Das inter-atomare Wechselwirkungspotential  $V(x, x')$  kommt i.A. mit einem harten, abstoßenden “Kern”, die eine Behandlung auf mikroskopischer Skala erschwert (und dessen Fouriertransformierte möglicherweise gar nicht existiert). Insbesondere kann die Streuung langsamer Teilchen nicht ohne Weiteres störungstheoretisch abgehandelt werden – denken Sie nur an die hart-Kugel Streuung aus der QM-I Vorlesung. Andererseits entnimmt man der Streutheorie, dass bei niedrigen Energien

$$kr_0 \ll 1, \quad (4.9)$$

die Wechselwirkung unabhängig vom konkreten Potentialverlauf durch die  $s$ -Wellenstreuung dominiert wird. In der  $s$ -Wellenstreuung ist die Streuamplitude unabhängig vom Streuwinkel, bei hinreichend niederen Energie auch unabhängig vom konkreten Wert der Energie, daher eine Konstante, bis auf ein Vorzeichen gleich der **Streulänge**  $a$ . Die Streulänge vermittelt ein Maß für die effektive Größe der Teilchen.<sup>3</sup> Sofern

<sup>3</sup>Der totale Streuquerschnitt ist  $\sigma_{\text{tot}} = 8\pi a^2$ , wobei die 8 (statt der erwarteten 4) auf die Ununterscheidbarkeit der Streupartner zurückzuführen ist.

also das System hinreichend verdünnt ist,

$$a \ll (V/N)^{\frac{1}{3}} \quad (4.10)$$

und man nicht an Korrelationen auf Skala  $\lesssim a$  interessiert ist, darf das physikalische Wechselwirkungspotential  $V(x, x')$  getrost durch ein aufgeweichtes, **effektives Potential**  $V_{\text{eff}}(x, x')$  ersetzt werden, dessen Fouriertransformierte existiert, das aber so gewählt wird, dass seine Streulänge für kleine Energien mit der des exakten Potentials übereinstimmt. Eine beliebige Wahl ist das zwar nicht sonderlich weiche, aber bequem zu handhabende **Pseudopotential**,

$$V_{\text{eff}}(x, x') = \tilde{V}_0 \delta^{(3)}(x - x') \quad (4.11)$$

dessen Streulänge, in erster Born'scher Näherung

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \tilde{V}_0 \quad (4.12)$$

Mit der Substitution (4.11) liest sich der Hamiltonoperatore (4.8)

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{\tilde{V}_0}{2V} \underbrace{\sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \hat{\rho}_{k_1+k_2, k_3+k_4} \hat{a}_{k_4}^\dagger \hat{a}_{k_3}^\dagger \hat{a}_{k_2} \hat{a}_{k_1}}_{:=\hat{Q}} \quad (4.13)$$

In Erwartung einer makroskopischen Besetzung der Grundzustands,  $\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \sim O(N)$ ,

wird im Wechseiwirkungsanteil  $\hat{Q}$  der  $k = 0$ -Term ausgesondert,

$$\begin{aligned}
\hat{Q} &= \underbrace{\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0}_{\hat{n}_0(\hat{n}_0-1)} + 4\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \\
&+ \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \\
&+ 2 \sum_{0 \neq k \neq q \neq 0} \left( \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_q \right) \hat{a}_0 + H.c. \\
&+ \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4 \\ \text{alle } k \neq 0}} \delta_{k_1+k_2, k_3+k_4} \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3} \hat{a}_{k_4}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

In der **Molekularfeldtheorie** nach Bogoliubov werden Operatoren  $\hat{a}_0^\dagger, \hat{a}_0$  durch  $c$ -Zahlen ersetzt,  $\hat{a}_0 \rightarrow \sqrt{n_0} \sim \sqrt{N}$ . Die Wechselwirkung kann dann formal nach Potenzen von  $\hat{a}_0$  bzw.  $\hat{a}_0^\dagger$  sortiert werden,<sup>4</sup> so dass schließlich

$$\hat{H} = N \frac{g}{2} + \sum_{k \neq 0} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \right) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{g}{2} \sum_{k \neq 0} \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger + \hat{a}_k \hat{a}_{-k} \right) + [\dots] \tag{4.15}$$

wo  $g$  eine effektive Kopplungskonstante,

$$g = \frac{N}{V} \tilde{V}_0 \tag{4.16}$$

und [...] alle vernachlässigten Beiträge.

Der Hamiltonoperator ist bilinear in den Leiteroperatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$ . Um mit den irritierenden  $\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}$  fertig zu werden, greift man zur **Bogoliubov-Transformation**<sup>5</sup>

$$\hat{b}_k = u_k \hat{a}_k + v_k \hat{a}_{-k}^\dagger, \tag{4.17}$$

$$\hat{b}_k^\dagger = u_k \hat{a}_k^\dagger + v_k \hat{a}_{-k} \tag{4.18}$$

<sup>4</sup>Dabei ist für die ersten beiden Terme in (4.14) zu beachten  $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 = N - \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ .

<sup>5</sup>Nikolai Nikolajewitsch Bogoliubow, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947)

wobei gefordert wird, dass die  $\hat{b}$  Bose-Operatoren. Wie man unschwer bestätigt

$$u_k^2 - v_k^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger \\ \hat{b}_k, \hat{b}_{-k} \end{bmatrix} = \delta_{kk'} \\ \begin{bmatrix} \hat{b}_k, \hat{b}_{-k} \\ \hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_{-k}^\dagger \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{b}_k, \hat{b}_{-k}^\dagger \\ \hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_{-k} \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

womit die Umkehrung lautet

$$\hat{a}_k = u_k \hat{b}_k - v_k \hat{b}_{-k}^\dagger, \quad (4.20)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = u_k \hat{b}_k^\dagger - v_k \hat{b}_{-k} \quad (4.21)$$

Eingesetzt in ( ) schaut man auf

$$\begin{aligned} \hat{H} = & N \frac{g}{2} + \sum_{k \neq 0} \left[ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \right) v_k^2 - g u_k v_k \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left[ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \right) (u_k^2 + v_k^2) + g(-2u_k v_k) \right] (\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_{-k}^\dagger \hat{b}_{-k}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \underbrace{\left[ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g \right) (-2u_k v_k) + g(u_k^2 + v_k^2) \right]}_{= 0} (\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{-k}^\dagger + \hat{b}_k \hat{b}_{-k}) \\ & + [\dots] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Parametrisiere  $v_k = \sinh \alpha_k$ ,  $u_k = \cosh \alpha_k$ , beachte  $\cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha = \cosh 2\alpha$  sowie  $\cosh \alpha \sinh \alpha = \frac{1}{2} \sinh 2\alpha$ , finde

$$u_k^2 + v_k^2 = \cosh(2\alpha_k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g, \quad 2u_k v_k = \sinh(2\alpha_k) = \frac{g}{\varepsilon_k} \quad (4.23)$$

mit

$$\varepsilon_k = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g\right)^2 - g^2} \quad (4.24)$$

$$\hat{H} = N\frac{g}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left[ \varepsilon_k - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - g \right] + \sum_{k \neq 0} \varepsilon_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k \quad (4.25)$$

$$\varepsilon_k \propto \begin{cases} \sqrt{\frac{g}{m}} \hbar k & \text{für } k \rightarrow 0 \\ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g - \frac{4gm}{\hbar^2 k^2} & \text{für } k \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.26)$$

im Hochenergiebereiches  $k \rightarrow \infty$  **Teilchenspektrum**  $\varepsilon(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ , im Niederenergiebereiches  $k \rightarrow 0$  **Phononenspektrum**  $\varepsilon(\vec{p}) = c|\vec{p}|$  wo

$$c_s = \sqrt{\frac{g}{m}} = 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\rho \alpha_0^3}{m \alpha_0}} \frac{\hbar}{m \alpha_0} \quad (4.27)$$

die sog. **Schallgeschwindigkeit** des Kondensats.

Bose-Einstein Kondensate sind **superfluid** – sofern die Flussgeschwindigkeit nicht zu groß ist fließen sie ohne Reibungsverluste durch Röhren oder ähnliches. Den Fluss durch eine Röhre modellieren wir als Bewegung eines Körpers der Masse  $M$  (=Masse der Röhre) relativ zum Kondensat. Reibungsverluste resultieren aus Stößen zwischen dem Kondensat und dem Körper. Impuls- und Energiesatz für einen elementaren Stoß im Ruhesystem des Kondensats

$$M\vec{V} = M\vec{V}' + \hbar\vec{k}, \quad (4.28)$$

$$\frac{M}{2}V^2 = \frac{M}{2}V'^2 + \varepsilon(\vec{k}), \quad (4.29)$$

wo  $\vec{V}$  bzw.  $\vec{V}'$  die Geschwindigkeit der Röhre relativ zum Kondensat vor bzw. nach dem Stoß,  $\hbar\vec{k}$  der Impuls und  $\varepsilon(\hbar\vec{k})$  die Energie einer elementaren Anregung.

Umstellen der Impulsbilanz (5.60) liefert zunächst  $\vec{V} - \frac{\hbar\vec{k}}{M} = \vec{V}'$ , quadrieren und erneut umstellen sodann  $\frac{M}{2}\vec{V}^2 = \frac{M}{2}\vec{V}'^2 + \hbar\vec{k} \cdot \vec{V} - \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2M}$ .

$$\vec{V} - \frac{\hbar\vec{k}}{M} = \vec{V}' \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{2}\vec{V}^2 = \frac{M}{2}\vec{V}'^2 + \hbar\vec{k} \cdot \vec{V} - \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2M} \quad (4.31)$$

$$|\vec{V}| = \frac{1}{\cos\vartheta} \left( c + \frac{\hbar|\vec{k}|}{2M} \right) \geq c_s + \frac{\hbar|\vec{k}|}{2M} \quad (4.32)$$

Im Grenzfall  $M \rightarrow \infty$  also insbesondere  $|\vec{V}| \geq c_s$ , d.h. nur wenn die Relativgeschwindigkeit von Kondensat und externem Körper die Schallgeschwindigkeit überschreitet kann eine Anregung des Kondensats stattfinden.