Kapitel 6

Klein-Gordon Gleichung

Anliegen einer relativistischen Quantenmechanik ist die Hochzeit der Quantenmechanik mit den Prinzipien der Relativitätstheorie. Als ersten Schritt sucht man die nicht-relativistische Schrödingergleichung derartig abzuändern, dass sie den Ansprüchen der relativistischen Kovarianz genügt: die gesuchte Gleichung sollte unter Poincare-Transformationen ihre Form behalten. Als Leitfaden dient dabei das **Korrespondenzprinzip**, wonach Energie E und Impuls $\vec{p}$ in der relativistischen Energie-Impulsbeziehung $E = H(\vec{p}, \vec{q})$ in Differentialoperatoren übersetzt werden,

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}. \tag{6.1}$$

Als Resultat erhält man Wellengleichungen, Klein-Gordon bzw Dirac, die als Ausgangspunkt einer relativistischen Quantenmechanik fungieren.

Wie jede gute Theorie hat auch die relativistische Quanten*mechanik* einen begrenzten **Gültigkeitsbereich**. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ bedeutet jeder Versuch, Teilchen der Masse m auf ihrer Compton-Wellenlänge zu

Bühne der SRT ist der Minkowski-Raum in dem jedes raumzeitliche Ereignis P relativ zu einem geeigneten Bezugssystem S durch 4 Koordinaten x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ beschrieben wird. Unter einem geeigneten Bezugssystem versteht man dabei eine Standard-Uhr, deren Zeitanzeige t via $x^0 = ct$ der Datierung dient, einen als fest ausgezeichneten räumlichen Punkt O, der als Ursprung eines räumlichen Koordinatensystems fungiert, und ein starres Gerüst rechtwinkliger Achsen, das der Lokalisierung des fraglichen Ereignisses bezüglich O mittels eines räumlichen Vektors $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ dient.
Unter einem Wechsel des Bezugssystems transformieren Minkowski-Koordinaten $x \mapsto x' = \Lambda x + a$ (sog. Poincaré-Transformation), wo a konstanter Minkowski-Vektor, und Λ Lorentztransformation, also linear Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, die der Bedingung $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ mit η der Minkowski-Tensor $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ genügt, wodurch die Invarianz $s^2_{x'y'} = s^2_{xy}$ des Minkowski-Abstandes $s^2_{xy} = (y^0 - x^0)^2 - (\vec{y} - \vec{x})^2$, und also die "Konstanz der Lichtgeschwidigkeit", $c = const.$, garantiert ist.
Die Ordnung zweier Ereignisse x, y heißt zeitartig , wenn $s^2_{xy} > 0$, raumartig wenn $s^2_{xy} < 0$, und lichtartig wenn $s^2_{xy} = 0$. Nur wenn die Ordnung zeit- oder lichtartig ist, kann das Ereignis mit der kleineren Zeitkoordinate das andere Ereignis ursächlich beeinflussen (Kausalitätsprinzip).

Tangentialvektoren $v = (v^\mu)$ des Minkowski-Raumes heißen 4-er Vektoren. Das Minkowski-Skalarprodukt zweier 4-er Vektoren u und v ist erklärt $u \cdot v := u^T \eta v$ (Matrixdarstellung: v ist als Spalte notiert, u^T als Zeile, und η als 4×4-Matrix). Unter einer Poincaré-Transformation transformieren 4-er Vektoren linear $v \mapsto v' = \Lambda v$, also ohne die Verschiebung a.
Im Ricci'schen Indexkalkül definiert die Minkowskimetrik via $v_\mu := \eta_{\mu\nu} v^\nu$ unter Berufung auf die Einstein'schen Summenkonvention "über doppelt schräg gestellte Indices wird summiert" die kovarianten Koordinaten v_μ von v (die v^μ heißen dann die kontravarianten Koordinaten von v). Das Minkowski-Skalarprodukt liest sich im Ricci-Kalkül $u \cdot v = u^\mu v_\mu$. Offensichtlich gilt $u^\mu v_\mu = u_\mu v^\mu$.
Kontravariante transformieren mit Λ (Indexbild $\Lambda^{\mu'}{}_\mu$), kovariante transformieren mit Λ^{T-1} (Inverse der Transponierten), wobei $\Lambda^{T-1} = \eta \Lambda \eta^{-1}$ (Indexbild $\Lambda_{\mu'}{}^\mu$). So transformiert beispielsweise der 4-er Gradient $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (=Ableitung nach kontravarianten Koordinaten) kovariant (was bereits durch die Stellung der Indices angedeutet wird). Das unterschiedliche Transformationsverhalten garantiert, dass das Minkowski-Skalarprodukt zweier Vektoren u, v invariant unter Lorentztransformationen, $u' \cdot v' = u \cdot v$.

lokalisieren, $\Delta x < (\hbar/mc)$, eine Impulsunschärfe $\Delta p \geq mc$. Die damit einhergehende Energieunschärfe $\Delta E > mc^2$ übersteigt die Ruheenergie mc^2, und stellt daher genügend Energie zur Verfügung, neue Teilchen entstehen zu lassen, die sich in Nichts von den "Originalteilchen" unterscheiden. Da solche Prozesse den Rahmen einer Einteilchen-Theorie sprengen kann die relativistische Quantenmechanik – und die wird hier immer als Einteilchen-Theorie aufgefasst – nur ein Zwischenschritt sein auf dem Weg zu einer relativistischen Theorie vieler Teilchen: der Quanten*feldtheorie*.

Das Scheitern einer relativistischen Einteilchen-Quantenmechanik sollte nicht überraschen: schon das elektromagnetische Feld kann ja nicht als Ansammlung unzerstörbarer Teilchen (Photonen) aufgefasst werden: in jedem Absorptionsakt verschwindet ein Photon, in jedem Emissionsakt wird ein Photon geboren.

Ebenso die Wechselwirkung von Elektronen und Positronen. Ist die kinetische Energie der Relativbewegung nur groß genug, werden im Stoß ein Elektron und ein Positron unter Erzeugung zweier Gamma-Quanten (zweier Photonen) vernichtet. Kurz: eine Quantenmechanik des unzerstörbaren Massepunktes "Elektron" ist schon aus empirischen Gründen grundsätzlich nicht haltbar.

Trotzdem hat die relativistische Quantenmechanik ihre Berechtigung: solange man es nur mit freien Teilchen zu tun hat, also keinerlei Wechselwirkung im Spiel ist, liefert sie schon die "richtigen" Gleichungen. Und selbst wenn die Wechselwirkung (mit einem externen Potential, beispielsweise) berücksichtigt wird, liefert die relativistische Quantenmechanik schon ganz brauchbare Resultate. Man darf halt nur die involvierten Energien nicht zu hoch treiben – oder die Lokalisierung zu weit, siehe oben.

6.1 Freie Klein-Gordon-Gleichung

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung des **freien Teilchens**

$$E(\vec{p}) \equiv \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \tag{6.2}$$

erhält man mittels Korrespondenz (6.1) eine Wellengleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = \sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\vec{\nabla}^2}\ \phi$. Unangenehm ist hier die Wurzel – in der Taylorentwicklung tauchen alle Potenzen von $\Delta = \vec{\nabla}^2$ auf. Die Theorie ist **nichtlokal**: interessiert man sich für die zeitliche Entwicklung der ϕ-Stärke am Ort $\vec{x}$ müssen bestimmte Ableitungen von ϕ beliebig hoher Ordnung bei $\vec{x}$ bekannt sein – gemäß Taylor also ϕ *für alle* $\vec{x}$!

Die Wurzel wird vermieden indem man die die Energie-Impuls-Beziehung (6.2) zunächst quadriert, $E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4$, dann umstellt, $-(E^2/c^2 - \vec{p}^2) + m^2c^2 = 0$, und schließlich das Korrespondenzprinzip (6.1) aufruft,

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(x) = 0\,, \tag{6.3}$$

wo ϕ eine komplex- oder reellwertige Funktion, und der Differentialoperator $\partial_\mu\partial^\mu$ (über doppelt auftretende schräg gestellte Indices wird summiert) der aus der Elektrodynamik vertraute D'Alembert Differentialoperator,

$$\partial_\mu\partial^\mu \equiv \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\,. \tag{6.4}$$

Und da D'Alembert ein Lo'ska, ist Gl. (6.3) forminvariant unter Lo'tra $x \to x' = \Lambda x$ – wobei stillscchweigend vorausgesetzt wird, dass sich $|\phi|^2$ wie eine skalare Dichte transformiert, $|\phi(x)|^2 \to |\phi'(x')|^2 = (\ldots)|\phi(\Lambda^{-1}x')|^2$.

Gleichung (6.3) ist die sog. **Klein-Gordon-Gleichung**.[1] Die Klein-Gordon Gleichung ist für die relativistische Quantenmechnaik bzw. -Feldtheorie von hervorragender

[1] W. Gordon, Z. Physik **40, 117 (1926); O. Klein, Z. Physik 41, 407 (1927).**

Bedeutung. Freie Teilchen ohne Spin, ob mit oder ohne Ladung, werden durch sie beschrieben. Sofern Zerfalls- und Umwandlungsprozesses ignoeriert werden, gehören dazu beispielsweise die neutralen π^0 Mesonen (falls ϕ reell) und die elektrisch geladenen $\pi^\pm$ Mesonen (ϕ komplex).

6.1.1 Nichtrelativistischer Grenzfall

Physikalische Teilchen sind Teilchen mit Energie $E(\vec{p}) = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \ldots \geq mc^2 \geq 0$. Für solche Teilchen bietet sich an, einen mit der Ruheenergie mc^2 schnell oszilierenden Faktor abzuspalten

$$\phi(\vec{x},t) =: e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\psi(\vec{x},t)\,. \tag{6.5}$$

und die Theorie für ψ zu formulieren. Eingesetzt in die Klein-Gordon-Gleichung erhält man die Wellengleichung für ψ,

$$i\hbar\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2mc^2}\ddot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi\,. \tag{6.6}$$

Diese Gleichung ist strikt äquivalent der Klein-Gordon-Gleichung. Im **nicht-relativistischen Grenzfall**, d.h. unter der Annahme, dass ψ relativ zu dem Phasenfaktor $e^{-\frac{mc^2}{\hbar}t}$ langsam veränderlich, $\hbar^2|\ddot{\psi}| \ll mc^2\hbar|\dot{\psi}|$, darf der Term $\propto \ddot{\psi}$ vernachlässigt werden, und man erhält

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x},t)\,, \tag{6.7}$$

offensichtlich die nichtrelativistische Schrödingergleichung des freien Teilchens.

6.1.2 Lösungen der freien Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung (6.3) ist eine lineare partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Der Ansatz einer ebenen Welle

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{x},t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(\lambda t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \tag{6.8}$$

erweist sich als Lösung sofern

$$\lambda = +E(\vec{p}) \quad \text{oder} \quad \lambda = -E(\vec{p}) \quad \text{mit} \quad E(\vec{p}) = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}\,, \tag{6.9}$$

wobei in $E(\vec{p})$ unschwer die Energie-Impulsbeziehung des freien Teilchens wiedererkannt wird.

Unnötig darauf hinzuweisen, dass die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung eine lineare Überlagerung von Wellen der Gestalt (6.8). Mit Blick auf spätere Anwendungen wählen wir

$$|A| = \sqrt{\frac{\hbar^2c^2}{2VE(\vec{p})}}\,, \tag{6.10}$$

und schreiben die lineare Überlagerung in der Form

$$\phi(\vec{x},t) = \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{\hbar^2c^2}{2VE(\vec{p})}} \left(a_{\vec{p}}e^{-\frac{i}{\hbar}(E(\vec{p})t - \vec{p}\cdot\vec{x})} + b^*_{\vec{p}}e^{+\frac{i}{\hbar}(E(\vec{p})t - \vec{p}\cdot\vec{x})}\right) \tag{6.11}$$

mit dimensionslosen komplexen Koeffizienten $a_{\vec{p}}, b_{\vec{p}}$, die durch die Anfangswerte $\phi(\vec{x}, t = 0)$ und $\dot{\phi}(\vec{x}, t = 0)$ gegeben sind.

Mit der Wahl der Amplitude (6.10) erhält ϕ die physikalische Dimension $[\phi] = \sqrt{\text{Kraft}}$. Diese etwas ungewöhnliche physikalische Dimension wird durch die Wahl der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ diktiert, vgl. der Abschnitt zur Feldtheorie, wo $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-$

$\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\phi|^2$ als Lagrangedichte für das Klein-Gordon-Feld eingeführt wird. Mit der hier gewählten Amplitude (6.10) stimmt die Feldenergie(!) der Klein-Gordon-Welle (6.8) mit der Einteilchenergie(!) $E(\vec{p})$ überein.

Die etwas merkwürdig erscheinende Parametrisierung mit den b^* und den räumlichen Modenfunktionen $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$ (statt b und $e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$) im zweiten Summanden tut der Allgemeinheit von ϕ keinen Abbruch, hat sich aber als nützlich erwiesen. Ist man beispielsweise nur an reellen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung (6.3) interessiert, wäre in (6.11) einfach $a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}}$ zu setzen.

Die allgemeine Lösung (6.11) ist eine Überlagerung von Klein-Gordon Wellen zu positivem $\lambda = +E(\vec{p})$ und negativem $\lambda = -E(\vec{p})$. Mit Blick auf den Phasenfaktor $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ einer DeBroglie-Welle, wo E eine nach unten beschränkte Energie, wäre eine Klein-Gordon-Welle zu positivem $\lambda = +E(\vec{p})$ durchaus als relativistische Wellenfunktion von Teilchen der Energie $E(\vec{p})$ zu deuten. Problematisch erscheinen allerdings Klein-Gordon-Wellen zu negativem $\lambda = -E(\vec{p})$. Da $-E(\vec{p})$ mit wachsendem $\vec{p}^2$ nach unten unbeschränkt, würden Teilchen, die durch derartige Klein-Gordon-Wellen beschreibbar wären, ihre Energie weiter verringern, wenn ihr Impuls zunimmt (sie schneller werden). Solche Teilchen sind in der Natur aber nie beobachtet worden. Klein-Gordon-Wellen mit $\lambda = -E(\vec{p})$ lassen sich nicht als DeBroglie-Wellen physikalischer Teilchen deuten.

Man könnte nun postulieren, dass physikalische Zustände nur aus Klein-Gordon-Wellen zu positivem λ superponiert werden können, also $b_{\vec{p}} = 0$ für alle $\vec{p}$ in Gl. (6.11). Für freie Teilchen wäre das auch kein Problem. Aber schon die Analyse der Streuung an der genügend hohen Potentialschwelle zeigt, dass Klein-Gordon-Wellen zu negativem λ nicht vermieden werden können (vgl. die Übungsaufgabe zum Klein'schen Paradox). Die Lösung (6.11) kann grundsätzlich nicht als DeBroglie Welle eines Teilchens gedeutet werden, entsprechend die Klein-Gordon-Gleichung nicht als "relativistische Schrödingergleichung".

Im übrigen ist nicht weiter erwunderlich, dass die Klein-Gordon-Gleichung nicht als relativistische Schrödingergleichung angesehen werden kann. Als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit müssen zwei Anfangwerte vorgegeben werden, ϕ und $\dot{\phi}$, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Das Zustandspostulat der Quantenmechanik besagt aber, dass der Zustand durch Angabe von, sagen wir ϕ, bereits vollständig charakterisiert sein sollte – was in der Klein-Gordon-Theorie offensichtlich nicht erreicht werden kann.

6.1.3 Energiesatz

Wenngleich eine Deutung von ϕ als quantenmechanische Wellenfunktion problematisch, ist die Klein-Gordon-Gleichung auf dem Weg zu einer konsistenten relativistischen Quantentheorie dennoch von Bedeutung: jedem Klein-Gordon-Feld ϕ kann eine nicht-negative zeitliche Erhaltungsgröße zugeordent werden – die **Energie** des Feldes (nicht zu verwechseln mit der Energie $E(\vec{p})$ eines Teilchens).

Multipliziert man die Klein-Godon-Gleichung (6.3) von links mit $\dot{\phi}^*$, addiert die von links mit $\dot{\phi}$ multiplizierte komplex-konjugierte Gleichung, erhält man eine Bilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{1}{c^2}|\dot{\phi}|^2 + |\vec{\nabla}\phi|^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}|\phi|^2\right]}_{:=c^{-1}T^{00}(\vec{x},t)} - \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left[\dot{\phi}^*\vec{\nabla}\phi + \dot{\phi}\vec{\nabla}\phi^*\right]}_{:=-\vec{T}^0(\vec{x},t)} = 0\,. \tag{6.12}$$

Die hier eingeführte Größe T^{00} ist positiv und wird feldtheoretisch als **Energiedichte** des Klein-Gordon Feldes(!) gedeutet, entsprechend $\vec{T}^0$ als **Energiestromdichte**.

Integration über den ganzen $\mathbb{R}^3$, Anwendung des Gauss'schen Satzes, Annahme

$\vec{s}|_{\partial\mathbb{R}^3} = 0$, liefert den zugehörigen **Energieerhaltungssatz**,

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0\,, \qquad \text{wobei} \qquad E(t) := \int T^{00}(\vec{x},t)d^3x\,. \tag{6.13}$$

Für das spezielle Klein-Gordon Feld Gl. (6.8) ergibt sich $E = 2\frac{E(\vec{p})^2}{\hbar^2c^2}|A|^2V$. Die Energie E dieses Feldes stimmt also mit der Einteilchenenergie $E(\vec{p})$ überein, wenn die Amplitude $A = \sqrt{\frac{\hbar^2c^2}{2E(\vec{p})V}}$, wie in Gl. (6.10) antizipiert.

Mehr noch. Die Feldenergie E von Klein-Gordon Wellen zu negativem $\lambda = -E(\vec{p})$ hat den gleichen Wert wie die Feldenergie von Klein-Gordon Wellen zu positivem $\lambda = +E(\vec{p})$, nämliche $E = E(\vec{p})$. Vor diesem Hintegrund ist $\lambda = \pm E(\vec{p})$ in der feldtheoretischen Deutung nicht als Energie eines Teilchens aufzufassen, sondern lediglich als Parameter für die zeitliche Entwicklung von ϕ.

Für die allgemeine Lösung (6.11) ergibt sich

$$E = \sum_{\vec{p}} E(\vec{p})\left(|a_{\vec{p}}|^2 + |b_{\vec{p}}|^2\right)\,. \tag{6.14}$$

6.1.4 Kontinuitätsgleichung

Eine zentrale Säule der Wellenmechanik ist das W'keitprinzip, wonach $|\psi|^2$ W'keitsdichte, entsprechend $\int_G |\psi|^2 d^3x$ die W'keit, das Teilchen im Gebiet G zu finden, und also $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x},t)|^2 = 1$ eine zeitliche Konstante. Für die Klein-Gordon Gleichung kann $|\phi|^2$ aber nicht als W'keitsdichte fungieren, da sich keine entsprechende Bilanzgleichung formulieren lässt ... [Schöne Übungsaufgabe: Wie lautet die Ratengleichung für $|\phi|^2$, und warum lässt sich das nicht als Bilanzgleichung formulieren?]

Der Differentialoperator in (6.3) ist reell; mit ϕ genügt auch ϕ^* der Klein-Gordon Gleichung. Differenz der beiden von links mit ϕ^* bzw ϕ multiplizierten Gleichungen liefert zunächst $\phi^*\Box\phi - \phi\Box\phi^* = 0$, nach Verwednung der Produktregel der Differentialrechnung und anschließender Multiplikation mit $i/\hbar$, wo i die imaginäre Einheit, sodann

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{i}{\hbar c^2}\right)\left[\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right]\right\} + \vec{\nabla}\cdot\left\{\left(\frac{1}{i\hbar}\right)\left[\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right]\right\} = 0\,. \tag{6.15}$$

Der Stromterm erinnert an die W'keitstromdichte der Schrödingertheorie. Allerdings kann im vorliegenden Fall die Dichte durchaus auch negative Werte annehmen, was eine Interpretation von Gl. (6.15) als Bilanzgleichung einer Einteilchen-W'keit verbietet.

Als Ausweg bietet sich an, Gl. (6.15) nicht als Bilanzgleichung einer W'keit, sondern einer *Ladungsmenge* zu interpretieren. Verabredet man also abkürzend

$$\rho := i\frac{e}{\hbar}\left[\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*\right]\,, \qquad \vec{j} := \frac{e}{i\hbar}\left[\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right]\,, \tag{6.16}$$

wird aus Gl. (6.15) wird die **Kontinuitätsgleichung** für "e-Ladung",[2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0\,. \tag{6.17}$$

Integration über den ganzen $\mathbb{R}^3$, Anwendung des Gauss'schen Satzes, Annahme $\vec{j}|_{\partial\mathbb{R}^3} = 0$, liefert Erhaltungssatz,

$$\frac{d}{dt}Q = 0\,, \qquad \text{wobei} \qquad Q := \frac{e}{\hbar}i\int\left[\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*\right]d^3x\,. \tag{6.18}$$

Für die allgemeine Lösung (6.11) ergibt sich

$$Q = e\sum_{\vec{p}}\left(|a_{\vec{p}}|^2 - |b_{\vec{p}}|^2\right)\,. \tag{6.19}$$

[2] Die hier eingeführte Ladungs-Konstante e kann, muss aber nicht, die elektrische Ladung bezeichnen.

Das reelle Klein-Gordon Feld ($b_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}$) ist offensichtlich "$e$-neutral", $Q = 0$. Für die komplexen Klein-Gordon-Wellen (6.8), mit A wie in (6.10), ergibt sich $Q = \pm e$. Klein-Gordon-Wellen zu $\lambda = \pm E(\vec{p})$ unterscheiden sich nicht in der Energie, sondern in der Ladung!

6.2 Minimale Kopplung

Die Bewegung eines Teilchens der Ladung elektrischen Ladung e im elektromagnetischen Feld, Sie erinnern sich, wird gemß̈ Korrespondenzprinzip in der in minimaler Kopplung beschrieben, $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi$ und $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}$. Übertragen auf die Klein-Gordon Gleichung (6.3) schaut man auf

$$\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e}{\hbar c}\Phi\right)^2 - \left(\vec{\nabla} - i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\right)^2\right]\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0\,. \tag{6.20}$$

Aus Sicht einer Feldtheorie ist e zunächst keine "Ladung" (des ϕ-Feldes), sondern lediglich eine Kopplungskonstante für die Kopplung des ϕ-Feldes an das elektromagnetische Feld. Sei nun ϕ eine Lösung von (6.20) zur Kopplungskonstanten e, dann ist offensichtlich ϕ^* ein Lösung von (6.20) zur Kopplungskonstanten $-e$,

$$\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{e}{\hbar c}\Phi\right)^2 - \left(\vec{\nabla} + i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\right)^2\right]\phi^* + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^* = 0\,. \tag{6.21}$$

Dass die Kopplungskonstante hier in der Tat die Bedeutung einer Ladung hat, sieht man mit einem Blick auf die Ladungserhaltung: vertauscht man dort ϕ mit ϕ^*, geht Q nach $-Q$: trägt das ϕ Feld die Ladung Q, so trägt das ϕ^* Feld die Ladung $-Q$.

Die Operation $\phi \mapsto \phi^C = \phi^*$ definiert die **Ladungskonjugation** des Klein-Gordon Feldes. Offensichtlich kehrt die Ladung unter Ladungskonjugation ihr Vorzeichen um, $Q^C = -Q$.

Mittels 4er Impuls $(p^\nu) \equiv (E/c, \vec{p})$ und 4er Potential $(A^\mu) = (\Phi/c, \vec{A})$ daher (beachte Stellung des 4-er Index)

$$p_\nu \to i\hbar\partial_\nu - eA_\nu \tag{6.22}$$

Das passt übrigens ganz gut: Ableitung nach kontravarianten Koordinaten x^μ gibt kovariante Komponenten.

Verabredet man hier einen Differentialoperator

$$D_\mu := \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \tag{6.23}$$

schreibt sich die Klein-Gordon Gleichung in der Form

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0\,. \tag{6.24}$$

[Hier (Übungen): Kontinuitätsgleichung]

[Schöne Übungsaufgabe:] Gleichung (6.24) ist die relativistische Variante der Schrödingergleichung des skalaren (=spinlosen) geladenen Punktteilchens im elektromagnetischen Feld. Um das zu verifizieren, setzen wir $\phi(\vec{x},t) = e^{-imc^2/\hbar}\psi(\vec{x},t)$ wobei $\psi(\vec{x},t)$ langsam zeitlich veränderlich, $|\dot{\psi}/\psi| \ll mc^2$, und vernachlässigen den Beschleunigungsterm $\ddot{\psi}$, begründet $\ddot{\psi} \ll mc^2\dot{\psi}$ ...

Der Differentialoperator (D_μ) heißt *kovariante Ableitung*. Das "Kovariieren" bezieht sich dabei aber nicht auf das Verhalten unter Lo'tra, sondern bezieht sich auf das Transformationsverhalten unter Eichtransformationen,

$$\phi \;\to\; \phi' = e^{-i\frac{e}{\hbar}\chi}\phi\,, \tag{6.25}$$

$$A_\mu \;\to\; A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi \tag{6.26}$$

gemäß

$$D_\mu\phi \to D'_\mu\phi' = e^{-i\frac{e}{\hbar}\chi}D_\mu\phi \tag{6.27}$$

Lies: kovariante Ableitung transformiert unter Eichtransformationen wie Wellenfunktion (was für die gewöhnliche partielle Ableitung nicht der Fall ist).

Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist minimale Kopplung *das* Rezept für die Kopplung materieller Teilchen (das sind die Fermionen des Standarmodells) an die Mediatoren (das sind die Wechselwirkungsteilchen des Standardmodells). Lediglich die Eichgruppe – hier die abelsche(!) $U(1)$ – muss für die elektroschwache bzw. starke Wechselwirkung durch nicht-abelesche Eichgruppen $SU(2)$ bzw $SU(3)$ ersetzt werden. Der Phasenfaktor in () wird dann Matrixwertig, die Felder nehmen Werte in einem Darstellungsraum der $SU(2)$ bzw $SU(3)$.

6.3 Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend halten wir fest, dass die Klein-Gordon Gleichung zwar relativistisch kovariant ist, ihre Lösungen ϕ aber nicht im Sinne der Wellenmechanik interpretiert werden können – vgl. die kritische Diskussion der Lösunge zu negativem λ.

Da ϕ nicht im Sinne der gewöhnlichen *Einteilchen-Quantenmechanik* interpretiert werden kann wurde die Klein-Gordon-Gleichung anfänglich verworfen. Eine andere Gleichung, die Dirac-Gleichung übernahm zunächst die Regie, obwohl auch diese Gleichung zu ähnlichen Schwierigkeiten in der Interpretation Anlass gibt wie sich bald zeigte.

Erst Mitte der 30'er Jahre wurde die Klein-Gordon-GLeichung wieder zum Leben erweckt wurde – nur jetzt aufgefasst als **Heisenberggleichung** für ein **Quantenfeld** $\hat{\phi}$.[3]

Wer sich nicht scheut, die Absolutquadrate $|a_{\vec{p}}|^2$ bzw. $|b_{\vec{p}}|^2$ in (6.14) quantentheo-

[3] W. Pauli u. V. Weisskopf, Helv. Phys. Acta **7, 709 (1934).**

retisch als Anzahloperatoren $\hat{n}_a := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ bzw. $\hat{n}_b := \hat{b}^\dagger\hat{b}$, und also E als Hamilton-operator (="Energieoperator") $\hat{H}$ des quantisierten Klein-Gordon-Feldes zu deuten, liegt schon ganz richtig. Für die systematische Rechtfertigung sei auf das Kapitel "Klein-Gordon quantisiert" verwiesen.