

# Kapitel 9

## W'hlg: Klassische Feldtheorie

Viele Feldtheorien sind durch ihre **Wirkung** definiert

$$S[\phi_1, \dots, \phi_N] = \frac{1}{c} \int_G d^4x \mathcal{L}(\phi_1, \dots, \phi_N, \partial\phi_1, \dots, \partial\phi_N; x), \quad (9.1)$$

worin  $\mathcal{L}$  **Lagrangedichte**,  $G \subset \mathbb{R}^4$  ein Gebiet der Raumzeit, das von raumarartigen Hyperflächen  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  begrenzt ist,  $\partial\phi_a$  kurz für die partiellen Ableitungen  $\partial_\mu\phi_a$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , und  $d^4x = c dt d^3x$ . In der Elektrodynamik werden die Felder  $\phi_a$ ,  $a = 1, \dots, N$ , mit den Komponenten  $A^\mu$  des 4er Potentials assoziiert, bei Dirac mit den 4 Komponenten des Dirac-Spinors usw. Die explizite  $x$ -Abhängigkeit in Gl. (9.1) berücksichtigt eventuell vorhandene externe Felder  $j(x)$ , die an die dynamischen Felder  $\phi_a(x)$  koppeln, beispielsweise in der Form  $j_\mu A^\mu$ . Der Faktor  $c^{-1}$  garantiert, dass  $\mathcal{L}$  die physikalische Dimension einer Energiedichte.

## 9.1 Lagrange'sche Feldtheorie

Wir beschränken uns jetzt auf ein reelles Feld  $\phi$ , also Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x). \quad (9.2)$$

Feldgleichungen folgen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Unter Variation  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$  variiert die Wirkung

$$\delta S = \frac{1}{c} \int_G \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \right\} d^4x \stackrel{!}{=} 0. \quad (9.3)$$

Partielle Integration im zweiten Term, Anwendung des Gauß'schen Satzes, dabei beachten  $\delta\phi|_{\partial G} = 0$ , liefert die gesuchten Feldgleichungen – die **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (9.4)$$

Bringt man hier die Ableitungen nach der Zeit auf die andere Seite

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \quad (9.5)$$

was doch sehr an die Lagrange Form der Newton'schen Bewegungsgleichungen  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$  erinnert: offensichtlich spielt  $\dot{\phi}$  die Rolle einer "Geschwindigkeit", und  $\sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)}$  –  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$  die Rolle einer "Kraft".

Ein schönes Beispiel vermittelt die Lagrangedichte der reellen Klein-Gordon Theorie ( $\phi$  reell),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (9.6)$$

Wegen  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi$  ist  $\partial \mathcal{L} / (\partial (\partial_\mu \phi)) = \eta^{\mu\beta} \partial_\beta \phi + \eta^{\alpha\mu} \partial_\alpha \phi = 2\partial^\mu \phi$ , damit Feldegleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0, \quad (9.7)$$

mit Identifikation  $\mu = mc/\hbar$  Klein-Gordon Gleichung (6.3).

Im Falle mehrere Felder  $\phi_a$ ,  $a = 1, \dots, N$  die unabhängig voneinander variiert werden,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} = 0, \quad a = 1, \dots, N. \quad (9.8)$$

Für zwei reelle Klein-Gordon Felder gleicher Masse beispielsweise

$$\mathcal{L} = \sum_{a=1,2} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \frac{\mu^2}{2} \phi_a^2 \quad (9.9)$$

Statt mit reellen  $\phi_1, \phi_2$  wird hier gerne mit komplexen Feldern gearbeitet,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2), \quad (9.10)$$

wobei  $\phi$  und  $\phi^*$  als unabhängige Variable betrachtet werden. Ausgedrückt in komplexen Feldern liest sich die Lagrangedichte (9.9)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 |\phi|^2. \text{ eq : FlTLKGC} \quad (9.11)$$

Euler-Lagrange zu  $\delta\phi^*$  lautet

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0, \quad (9.12)$$

während Euler-Lagrange zu  $\delta\phi$  gerade das konjugiert-komplexe von (9.12). Angesichts der Umkehrung

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi + \phi^*), \quad \phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\phi^* - \phi), \quad (9.13)$$

sind die partiellen Ableitungen verknüpft

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial \phi_1} - i \frac{\partial}{\partial \phi_2} \right) \quad (9.14)$$

zum Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial \phi} |\phi|^2 = \phi^* \quad (9.15)$$

## 9.2 Energie-Impuls Tensor

Für gegebenes Feld  $\phi$ , nicht notwendig Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen (9.5), ist  $\mathcal{L}$  Funktion von  $x$ , non-chalant notiert

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); x). \quad (9.16)$$

Die explizite  $x$ -Abhängigkeit berücksichtigt eventuell vorhandene externe Felder, etwa in der Form  $j(x)\phi(x)$ , wo  $j(x)$  festes Feld.

Ableitung nach  $x^\nu$

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \partial_\mu \phi + \partial_\nu^{\text{explizit}} \mathcal{L} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_\mu \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} \partial_\nu \phi \\ &+ \sum_\mu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) + \partial_\nu^{\text{explizit}} \mathcal{L} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Für “wahres”  $\phi$  – also  $\phi$ , das den Feldgleichungen genügt – ist hier  $\{\dots\} = 0$ . Der Rest kann zu einer **Bilanzgleichung** zusammengefasst werden

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = -\partial_\nu^{\text{explizit}} \mathcal{L} \quad (9.19)$$

worin  $T = T[\phi]$  der sog. **Energie-Impulstensor**,

$$T^\mu{}_\nu[\phi] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \quad (9.20)$$

auszuwerten für wahres Feld.

Sofern  $\partial^{\text{explizit}} \mathcal{L} = 0$ , also autonomes System, bedeutet  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  vier lokale Erhaltungssätze (Kontinuitätsgleichungen),

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{0\nu} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (9.21)$$

Räumliche Integration unter Verwendung des Gauss’schen Satzes und Annahme, dass die Felder für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  verschwinden, liefert globale Erhaltungssätze für das Feldes Gesamt-Energie  $E$  und -Impuls  $\vec{P} = (P^1, P^2, P^3)$ ,

$$E := \int T^{00} d^3x, \quad \frac{d}{dt} P^0 = 0, \quad (9.22)$$

$$P^i := \frac{1}{c} \int T^{0i} d^3x, \quad \frac{d}{dt} P^i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.23)$$

Erhaltungssätze sind Spezialfall eine allgemeinen Theorems von Emmy Noether (vgl. nächster Abschnitt): jede kontinuierliche Symmetrie impliziert eine Erhaltungsgröße. Sie kennen das schon aus der klassischen Mechanik: zeitliche Translationsinvarianz (hier:  $\partial_0^{\text{explizit}} \mathcal{L} = 0$ ) impliziert Energieerhaltung, räumliche Translationsinvarianz (hier:  $\vec{\nabla}^{\text{explizit}} \mathcal{L} = 0$ ) impliziert Impulserhaltung.

Beispiel Klein-Gordon

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (9.24)$$

Insbesondere

$$T^{00} = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad (9.25)$$

$$T^{0i} = -\frac{1}{c} \dot{\phi} \partial_i \phi, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.26)$$

### 9.3 Noether

Eine Transformation  $T : \phi \rightarrow \phi' = T(\phi)$  definiert eine **Symmetrie**, wenn die transformiert Wirkung  $S[\phi'] := S[\phi]$  (wo  $\phi = T^{-1}(\phi')$ ) invariant unter der Transformation, also  $S' = S$ , äquivalent  $S[\phi'] = S[\phi]$ .

Beispiel: Klein-Gordon ist invariant unter Feldspiegelung  $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ , nicht aber unter Verschiebung des Feld-Nullpunkts  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \epsilon$ .

Eine 1-parametrische Schar von Transformationen  $T_\epsilon$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , normiert  $T_{\epsilon=0} = \text{id}$ , heißt kontinuierlich, falls  $S[T_\epsilon(\phi)]$  stetig von  $\epsilon$  abhängt. Gilt hier  $S[T_\epsilon(\phi)] = S[\phi]$  definiert die Schar  $T_\epsilon$  eine **kontinuierliche Symmetrie** des Systems. Jede kontinuierliche Symmetrie, so ein Theorem von Emmy Noether, impliziert eine Erhaltungsgröße.

Hinreichend für das Vorliegen einer Symmetrie ist ein Transformationsverhalten der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi'_a, \partial_\mu \phi'_a) = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) + \partial_\mu J^\mu \quad (9.27)$$

worin  $(J^\mu)$  ein 4er Vektor mit  $J|_{\partial G} = 0$ . Die Wirkung bleibt von der 4er Divergenz unbeeinflusst – schließlich kann sie über die Gauss'schen Satz in ein Integral über die Oberfläche verwandelt werden, dessen Wert aber wegen  $J|_{\partial G} = 0$  gleich Null.

Sei also  $\mathcal{L}$  im Sinne (9.27) invariant unter  $T_\epsilon$ . Für kleine  $\epsilon$  ist dann

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \epsilon_a(x) \quad (9.28)$$

worin  $\epsilon_a(x)$  klein von Ordnung  $\epsilon$ , die genaue Form durch  $T$  bestimmt. Damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi'_a, \partial_\mu \phi'_a) - \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) &\approx \sum_a \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \epsilon_a + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu \epsilon_a \right\} \quad (9.29) \\ &= \sum_a \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right] \epsilon_a \\ &\quad + \sum_\mu \partial_\mu \left( \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \epsilon_a \right) \quad (9.30) \end{aligned}$$

Für wahre Felder ist hier [...] = 0. Führt man abkürzend ein,

$$j^\mu := \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \epsilon_a - j^\mu \quad (9.31)$$

impliziert Invarianz (9.27) eine Bilanzgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (9.32)$$

Entsprechend ist die (9.28) zugeordnete **Noether-Ladung**

$$Q(t) := \int j^0(\vec{x}, t) d^3x \quad (9.33)$$

eine Erhaltungsgröße,

$$\frac{d}{dt} Q = 0. \quad (9.34)$$

Beispiel komplexe Klein-Gordon. Lagrandgedichte invariant (mit  $\partial_\mu J^\mu = 0$ ) unter  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\epsilon}\phi$ ,  $\phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\epsilon}\phi^*$ ; für kleine  $\epsilon$  ist  $\delta\phi = i\epsilon\phi$  und  $\delta\phi^* = -i\epsilon\phi^*$ . Noether-Stromdichte

$$j^\mu = i[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu\phi)] \quad (9.35)$$

und Noether-Ladung

$$Q = i \int (\dot{\phi}^*\phi - \phi^*\dot{\phi}) d^3x \quad (9.36)$$

erhalten,

$$\frac{d}{dt}Q = 0. \quad (9.37)$$

## 9.4 Hamilton'sche Feldtheorie

Quantenmechanik – Sie erinnern sich – basiert auf der Hamilton'schen Formulierung der Mechanik. Der Hamiltonian ist allerdings kein "kovariantes" Konzept – die Energie transformiert unter Lorentz wie die 0-Komponente einer 4er Vektors. Hamilton'sche (Quanten)Feldtheorie kommt daher – verglichen mit der Lagrange'schen Feldtheorie – etwas unbeholfen daher.

Am Anfang steht die Wahl eine Koordinatensystems mit Auszeichnung einer Zeitkoordinate  $t$ , so dass Hyperflächen  $\sigma_{a,b}$  Gleichzeitigkeitsschnitte  $\sigma_{a,b} = (t_{a,b}, \vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . Wirkung

$$S[\phi] = \int_{t_a}^{t_b} L[\phi, \dot{\phi}] dt \quad (9.38)$$

worin  $L$  Lagrangefunktional

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int \mathcal{L}(\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t)) d^3x \quad (9.39)$$



Achtung: Lagrangefunktional für festes  $t$  definiert, daher  $\phi$  und  $\dot{\phi}$  unabhängige Zustandsgrößen (in kl Mechanik entsprechend  $q$  und  $\dot{q}$ ).

In Analogie zur Punktmechanik kanonisch konjugierter Impuls

$$\pi(\vec{x}, t) := \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \quad (9.40)$$

und Hamiltonfunktional

$$H[\phi, \pi] = \int \pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) d^3x - L \quad (9.41)$$

Feldgleichungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} \quad (9.42)$$

Dabei beachten  $\delta H / \delta \phi = \partial \mathcal{H} / \partial \phi - \vec{\nabla} \partial H / \partial (\vec{\nabla} \phi) -$  vgl. Gl. () in den Ergänzungen.

Formulierung mittels Poissonklammern [LL(I)-Konvention, S. 166]

$$\{f, g\} := \int \left[ \frac{\delta f}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \frac{\delta g}{\delta \phi(\vec{x}, t)} - \frac{\delta g}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \frac{\delta f}{\delta \phi(\vec{x}, t)} \right] d^3x \quad (9.43)$$

Insbesondere

$$\{\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (9.44)$$

$$\{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\} = \{\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)\} = 0, \quad (9.45)$$

sog *kanonische Poissonklammern*. Damit

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \{H, \phi(\vec{x}, t)\} \quad (9.46)$$

$$\dot{\pi}(\vec{x}, t) = \{H, \pi(\vec{x}, t)\} \quad (9.47)$$

Beispiel Klein-Gordon (reelles  $\phi$ ): Lagrangedichte  $\mathcal{L} = \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2$ , ergo

$$\pi(\vec{x}, t) \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(\vec{x}, t), \quad (9.48)$$

$$\mathcal{H} = \frac{c^2}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 \quad (9.49)$$

Interpretiert: Energie gespeichert in Bewegung (zeitliche Änderung), räumlicher Modulation, und generelle Anwesenheit (= Auslenkung aus "Ruhelage  $\phi = 0$ ").

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\delta H}{\delta \pi} = c^2\pi \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H}{\delta \phi} = \Delta\phi - \mu^2\phi \end{aligned} \right\} \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} - \Delta\phi + \mu^2\phi = 0. \quad (9.50)$$

wie gehabt.

## 9.5 Ergänzung: Funktional und so

Funktional ist eine Abbildung  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  worin  $M$  eine irgendwie interessierende Menge von Funktionen, meist über dem  $\mathbb{R}^n$ . Um anzudeuten, dass es sich bei  $F$  um ein Funktional (eine "Funktion von Funktionen") handelt, schreibt man  $F[\phi]$  – also das Argument (die Funktion  $\phi$ ) in eine eckige Klammer.

Wichtige Begriffe sind

- *Funktionaldifferential*, notiert  $\delta F$ , erklärt via

$$F[\phi + \delta\phi] = F[\phi] + \delta F[\phi] + O(\delta\phi)^2 \quad (9.51)$$

in Analogie zur Analysis  $f(\xi + \Delta\xi) = f(\xi) + df(\xi) + O(\Delta\xi)^2$ .

- *Funktionalableitung* erklärt via

$$\delta F[\phi] = \int \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) d^n x \quad (9.52)$$

in Analogie zur Analysis  $df(\xi) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} d\xi^i$ .

Für Funktionale der Form

$$F[\phi] = \int_G \mathcal{F}(\phi(x), \partial_i \phi(x); x) d^n x \quad (9.53)$$

worin die Dichte  $\mathcal{F}$  eine (meist algebraische) Funktion von  $\phi(x)$ , den ersten Ableitungen  $\partial_i \phi(x)$ , und möglicherweise externen Feldern  $j(x)$  (die nicht variiert werden), gilt insbesondere

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi(x)} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \phi(x))} \quad (9.54)$$

für alle Funktionen  $\phi$  im Definitionsbereich von  $F$ , die auf dem Rand  $\partial G$  den Wert Null annehmen.

Beweis:

$$\begin{aligned} F[\phi + \delta \phi] - F[\phi] &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi(x)} \delta \phi(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \phi(x))} \partial_i \delta \phi(x) \right\} d^n x \quad (9.55) \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi(x)} - \sum_{i=1}^n \left( \partial_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \phi(x))} \right) \right\} \delta \phi(x) d^n x \\ &\quad + \int \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \phi(x))} \delta \phi(x) \right) d^n x \quad (9.56) \end{aligned}$$

Das zweite Integral kann via Satz von Gauss in ein Oberflächenintegral von (...) über  $\partial G$  umgeformt werden. Da nach Voraussetzung  $\phi|_{\partial G} = 0$ , und also insbesondere

$\delta\phi|_{\partial G} = 0$  (denn neben  $\phi$  muss auch  $\phi + \delta\phi$  im Definitionsbereich von  $F$  liegen), liefert das Oberflächenintegral keinen Beitrag. Vergleich von ( ) mit ( ) liefert dann den Satz ( ).

Sei beispielsweise

$$F[\phi] := \int j(x)\phi(x)d^n x \quad (9.57)$$

dann

$$F[\phi + \delta\phi] = \int j(x)\phi(x)d^n x + \int j(x)\delta\phi(x)d^n x \quad (9.58)$$

und also

$$\delta F = \int j(x)\delta\phi(x)d^n x \quad \text{bzw.} \quad \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = j(x) \quad (9.59)$$

Eine schöne Anwendung vermittelt das Funktional  $F[\phi] = \int \delta^n(y-x)\phi(x)d^n x$ . worin  $\delta^n(y-x)$  die Delta-Funktion im  $n$ -dimensionalen Raum. Offensichtlich liefert  $F$  den Funktionswert von  $\phi$  an der Stelle  $y$ , kurz  $F[\phi] = \phi(y)$ . Statt  $\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} = \delta^n(y-x)$  schreibt man hier gerne

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta^n(y-x) \quad (9.60)$$

in Analogie zu  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^i} = \delta^j_i$  (Kroneckerdelta) in der Analysis.