Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2016/2017) -

Übungsblatt 1

Ausgabe 21.10.16 – Abgabe 24.10.16– Besprechung 25.10.16

▷ Aufgabe 1 (Verallgemeinerter Ehrenfest)

Sei $\hat{H}$ Hamiltonoperator eines Systems, und A eine beliebige Observable. Beweisen Sie das *verallgemeinerte Ehrenfest'sche* Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H},\hat{A}\right]\right\rangle \tag{1}$$

Schließen Sie: die klassischen Bewegungsgleichungen der Newton'schen Mechanik gelten *im Mittel*,

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{q}\rangle = \langle\hat{F}\rangle \tag{2}$$

mit $\hat{F} \equiv F(\hat{q})$ Kraftoperator,

$$\hat{F} = -\frac{\partial V(\hat{q})}{\partial\hat{q}}\,. \tag{3}$$

Genießen Sie die formale Analogie zur klassischen Mechanik. Für ein freies Teilchen, ein Teilchen im konstanten Kraftfeld, und den harmonischen Oszillator wird aus Ehrenfest sogar genau die Newton'sche Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. In allen anderen Fällen, also in Fällen wo $\langle F(\hat{q})\rangle \neq F(\langle\hat{q}\rangle)$, gilt dies zwar nicht genau – aber möglicherweise näherungsweise. Zeigen Sie: Für genügend langsam veränderliche Kraftfelder

$$\varepsilon := \frac{\delta_\psi^2 q F''(q)}{2F(q)} \ll 1 \tag{4}$$

bewegt sich der Erwartungswert $\langle\hat{q}\rangle_\psi := q$ gemäß der Newton'schen Bewegungsgleichung, $m\ddot{q} = F(q)$. "Genügend langsam veränderlich" heißt übrigens, dass sich die Stärke der Kraft über die (räumliche) Ausdehnung des Wellenpaketes $|\psi(x,t)|^2$ nicht wesentlich ändert. In diesem Fall darf das quantenmechanische Punktteilchen als klassisches Punktteilchen am Ort $q = \langle\hat{q}\rangle_\psi$ aufgefasst werden.

▷ Aufgabe 2 (Verallgemeinerte Unschärferelationen) (4 Punkte)

Sie erinnern sich an die Varianz (Unschärfe) einer Observable, $\delta A := [\langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle]^{1/2}$.

Seien nun $\hat{A}$, $\hat{B}$ zwei selbstadjungierte Operatoren mit Kommutator

$$[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}\,. \tag{5}$$

Beweisen Sie die folgend wichtige Ungleichung für das Produkt der Varianzen

$$\delta A\delta B \geq \frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle| \tag{6}$$

▷ **Aufgabe 3 (Energie-Zeit Unschärferelation)**

Die Energie-Zeit Unschärferelation

$$\delta E \delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{7}$$

wird im Labor gerne für "Pi-mal-Daumen" Argumente verwendet.

(a) Sei A eine beliebige quantenmechanische Observable. Ein Maß für die Zeitspanne, in der sich A um eine Standardabweichung δA ändert, ist mit

$$\delta t(A) := \frac{\delta A}{\left| \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle \right|} \tag{8}$$

gegeben. Zeigen Sie unter Verwendung des verallgemeinerten Ehrenfestschen Theorem (1) und der verallgemeinerten Form der Heisenbergschen Unschärferelation (6), dass $\delta E \delta t(A) \geq \hbar/2$. Da hier δt für jede Observable definiert werden kann, die rechte Seite aber von A anabhängig ist, schaut man auf (7).

(b) Ihre Form erinnert stark an die Heisenberg'sche Unschärferelation für komplementäre Observable wie "Ort" und "Impuls". Allerdings ist die Zeit keine Observable – es gibt keinen selbstadjungierten Operator "Zeit". Wie würden Sie die Energie-Zeit-Unschärferelation also interpretieren?