Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2016/2017) -

Übungsblatt 2

Ausgabe 02.11.16 – Abgabe 10.11.16– Besprechung 11.11.16

▷ Aufgabe 1 (Galilei-Schub)

Wir betrachten die Galileitransformation (reiner Schub des gestrichenen Koordinatensystems mit Geschwindigkeit $\vec{V}$ gegenüber dem ungestrichenen Koordinatensystem)[1]

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t\,, \qquad t' = t \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie: Die Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ genügt genau dann der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t) \tag{2}$$

wenn die transformierte Wellenfunktion

$$\tilde{\psi}(\vec{x}', t') := e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m\vec{V}^2}{2}t - i\frac{m\vec{V}}{\hbar}\cdot\vec{x}'}\psi(\vec{x}' + \vec{V}t', t') \tag{3}$$

der Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\tilde{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta'\tilde{\psi}(\vec{x}', t') + V(\vec{x}' + \vec{V}t', t') \tag{4}$$

genügt.

Anders ausgedrückt: die Abbildung $D(g) : (\vec{x}, t, \psi) \mapsto (\vec{x}', t', \tilde{\psi})$ ist Darstellung D einer Galileitransformation g.

Da sich für freie Teilchen die Form der Hamiltonfunktion unter $D(g)$ nicht ändert, sagt man der Hamiltonoperator sei invariant unter Galileitrafos.

(b) Sie erinnern sich – die W'keitstromdichte ist definiert $\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)(\vec{x}, t)$. Zeigen und interpretieren Sie, dass unter einer Galileitrafo die W'keitstromdichte transformiert

$$\vec{j} \mapsto \tilde{\vec{j}} = -\vec{V}|\psi|^2 + \vec{j}\,. \tag{5}$$

▷ Aufgabe 2 (Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile)

Hegel's Diktum, auf die Quantenmechanik übertragen, besagt, dass zusammengesetzte Systeme Observable aufweisen, die nicht einfach aus den Observablen der Konstituenten kombiniert sind.

Zeigen Sie

---

[1] Im mathematischen Bissen "Noethers Theorem" wird nicht das Koordinatensystem (die Messapperatur), sondern das System selber "geschubt". Daher die unterschiedlichen Vorzeichen der Schubgeschwindigkeit $\vec{V}$.

(a) Ein System mit D-dimensionalem Hilbertraum $\mathcal{H}$ kommt grundsätzlich $D^2 - 1$ linear unabhängigen nicht-trivialen Observablen (zuzüglich der trivialen Observablen $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$). Alle anderen Observable sind schlicht Linearkombinationen dieser Observablen.

Hat man nun zwei Systeme A und B mit D_A- bzw. D_B-dimensionalen Hilberträumen $\mathcal{H}_A$ bzw $\mathcal{H}_B$, ist der Hilbertraum des aus A und B zusammengesetzten System $A\&B$ von Dimension $D_A D_B$, und also gibt es $(D_A D_B)^2 - 1$ nicht-triviale linear unabhängige Observable. Das sind offensichtlich mehr als die $D_A^2 + D_B^2 - 2$ Observable, die man zur Verfügung hat, wenn die Konsituenten A und B getrennt betrachtet werden. Kurz: ein zusammengesetztes System beinhaltet mehr Information als Summe seiner Teile. Die "Zusatz-Information", die sich in den Quantenkorrelationen befindet, beinhaltet Phasen, und die haben nun mal kein klassisches Gegenstück.

▷ Aufgabe 3 (Präparieren, Messen und Mischen)

Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, die im polarisierten Zustand $|\uparrow_x\rangle$ präpariert sind, werden in einem Stern-Gerlach Magneten einer σ_z Messung unterworfen.

(a) In welchem Zustand befinden sich die Teilchen nachdem sie den SGM verlassen haben?

(b) In welchem Zustand befinden sich die Teilchen, nachdem sie das SGM mit einem blockierten unteren Kanal verlassen haben?

(c) Wie lauten die Antworten zu (a) und (b) für Teilchen, die im unpolarisierten Zustand präpariert sind? Wie könnte man überhaupt einen unpolarisierten Zustand präparieren?

▷ Aufgabe 4 (Zustandsoperator)

Seien ψ_i, $i = 1, \ldots, N$ eine Menge normierter, aber nicht notwendig paarweise orthogonaler Zustandsvektoren, fürderhin p_i, $i = 1, \ldots, N$ nicht negative reelle Zahlen mit Summe $\sum_i p_i = 1$. Zeigen Sie, dass der mit

$$\hat{\rho} := \sum_{i=1}^{N} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \,, \tag{6}$$

verabredete Operator den Anforderungen an einen statistischen Dichteoperator genügt (selbstadjungiert, positiv-definit, normiert $\mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1$).

▷ Aufgabe 5 (Neutronenstern (klein))

Gegeben zwei Neutronen, die nur gravitativ über das Potential

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{Gm^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \tag{7}$$

wechselwirken, wobei G die Gravitationskonstante und m die Neutronenmasse.

(a) Bestimmen Sie die gebundenen Zustände und deren Energiewerte.

(b) Geben Sie den effektiven Radius des Systems im Grundzustand in Einheiten des Bohr'schen Radius der Atomphysik. Irgendwelche Aussichten, jemals unseren Neutronenstern zu beobachten?

Hinweis: Neutronen – sind das nicht identische Fermionen? ...