Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2016/2017) -

Übungsblatt 5

Ausgabe 07.12.16 – Abgabe 15.12.16– Besprechung 06.12.16

▷ **Aufgabe 1**

Ergänzt man die Klein-Gordon Gleichung um einen Quellterm $\lambda(\vec{x}, t)$ schaut man auf

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi(x) = \lambda \,, \tag{1}$$

treffend genannt die *inhomogene Klein-Gordon Gleichung.*

(a) Zeigen Sie, dass (1) eine Bilanzgleichung impliziert

$$c^{-1} \partial_t T^{00}_\lambda + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}^0 = -(\dot{\lambda} \phi^* + \dot{\lambda}^* \phi) \tag{2}$$

mit $T^{00}_\lambda = T^{00} - (\lambda^* \phi + \lambda \phi^*)$, wobei $c^{-1} T^{00} = \left[\frac{1}{c^2} |\dot{\phi}|^2 + |\vec{\nabla} \phi|^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} |\phi|^2 \right]$ und $\vec{T}^0 = -\left[\dot{\phi}^* \vec{\nabla} \phi + \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi^* \right]$. Feldtheoretisch wird (2) als *Energiebilanz* interpretiert.

(b) Für stationäre Quellen $\partial_t \lambda = 0$ beweise man den Energiesatz

$$\frac{d}{dt} E_\lambda = 0 \,, \text{ wobei } E_\lambda = \int \left\{ \frac{1}{c^2} |\dot{\phi}|^2 + |\vec{\nabla} \phi|^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} |\phi|^2 - (\lambda^* \phi + \lambda \phi^*) \right\} d^3 x \,. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass für eine am Ort $\vec{x}'$ plazierte Punktquelle, also $\lambda(\vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ die Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{e^{-\kappa |\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{4}$$

mit $\kappa = mc/\hbar$ die physikalisch akzeptable Lösung der zeitunabhängigen Klein-Gordon Gleichung $(-\Delta_x + \kappa^2) G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$. Schließen Sie, dass somit

$$\phi(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{x}') \lambda(\vec{x}') d^3 x' \tag{5}$$

die zeitunabhängige Lösung von (1) für beliebige zeitunabhängige Quelle λ, und somit

$$E_\lambda = - \iint \lambda(\vec{x}) G(\vec{x}, \vec{x}') \lambda(\vec{x}') d^3 x d^3 x' \,. \tag{6}$$

Für das reelle Quellfeld zweier Quellklumpen, der eine plaziert bei $\vec{a}$, der andere bei $\vec{b}$, $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$ ist $E_\lambda = E_{aa} + E_{bb} + E_{ab}$, worin E_a und E_b die Selbstenergien der Klumpen a, b, und E_{ab} ihre Wechselwirkungsenergie,

$$E_{ab} = 2 \iint \lambda_a(\vec{x}) G(\vec{x}, \vec{x}') \lambda_b(\vec{x}') d^3 x d^3 x' \,, \tag{7}$$

wobei hier von der Symmetrie $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$ Gebrauch gemacht wurde.

(d) Zeigen Sie für den speziellen Fall, dass es sich um Punktquellen der Stärke g_a bzw g_b handelt,

$$E_{ab} = -2g_a g_b G(|\vec{a} - \vec{b}|) = -\frac{2g_a g_b}{4\pi} \frac{e^{-\kappa|\vec{a}-\vec{b}|}}{|\vec{a} - \vec{b}|} . \tag{8}$$

Offensichtlich können zwei Quellklumpen mit gleichnamiger "Ladung" ($g_a g_b > 0$) ihre Wechselwirkungenergie vermindern, wenn sie sich näher kommen! Yukawa hat so seinerzeit den Zusammenhalt von Neutron und Proton im Deuteron (einem gebundenen Zwei-Teilchen Zustand) durch Austausch von Mesonen (den durch ϕ beschriebenen Teilchen) erklärt. Ihm zu Ehren heißt (8) daher auch *Yukawapotential*.

Dass sich im Yukawa-Modell gleichnamige (starke) Ladungen anziehen, in der Elektrodynamik aber gleichnamige (elektrische) Ladungen abstoßen, findet seine tiefere Begründung im Spin s der Felder ϕ vs A^μ. Das Klein-Gordon-Feld hat Spin $s = 0$, das elektromagnetische Feld $s = 1$. Das Gravitationsfeld hat übrigens Spin $s = 2$ – hier ziehen sich gleichnamige Ladungen (das sind die Massen=Quellen des Gravitationsfeldes) an, wie jeder aus eigener Erfahrung zu berichten weiß ...