Theoretische Physik V
- Quantenmechanik II (WS 2016/2017) -

Übungsblatt 6

Ausgabe 11.01.17 – Abgabe 19.01.17 – Besprechung 20.11.17

▷ Aufgabe 1 (Omnipräsenz der negativen Energien)

Betrachten Sie ein freies Dirac-Teilchen das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch

$$\psi(\vec{x}, t = 0) = \frac{1}{[2\pi a^2]^{3/4}} e^{-\vec{x}^2/(4a^2)+i\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

beschrieben wird, also "Gauss'sches Wellenpaket" ausschließlich positiver Energie-Komponenten.

Zeigen Sie durch Lösen des Anfangswertproblems der freien Dirac-Gleichung: (a) Zu einem späteren Zeitpunkt entwickelt ψ Anteile negativer Energie. (b) Die Anteile werden $O(1)$, wenn a von der Größenordnung oder kleiner als die Comptonwellenlänge.

Merke: Versucht man Teilchen besser als ihre Comptonwellenlänge zu lokalisieren wird man mit relativistischen Effekten konfrontiert.

▷ Aufgabe 2 (Ladungskonjugation)

Positronen sind Teilchen wie Du und ich. Von Elektronen unterscheiden sie sich nur in ihrer elektrischen Ladung: wo Elektronen mit der Ladung $e = -e_0$ daher kommen, kommen Positronen mit der Ladung $e = +e_0$ daher. Die Wellenfunktion eines Positrons, im folgenden bezeichnet Ψ_{e^+}, genügt einer Diracgleichung, die sich nur im Vorzeichen der Kopplungskonstanten von der Diracgleichung des Elektrons unterscheidet,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{e^+} = \left[c\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + e\vec{A}\right) + mc^2\beta - e\Phi 1_4\right]\Psi_{e^+}\,. \tag{2}$$

Gemäß Löchertheorie sollte es möglich sein, jeder Lösung Ψ der Elektronen-Diracgleichung eine bestimmte Lösung $\Psi_{\mathfrak{C}}$ der Positronen-Diracgleichung (2) zuzuordnen. Da Elektronen und Positronen gleichberechtigte Teilchen, sollte die Abbildung $\Psi \mapsto \Psi_{\mathfrak{C}}$ umkehrbar eindeutig und normerhaltend sein.

(a) Zeigen Sie: Genügt $\Psi(\vec{x}, t)$ der Elektronen-Diracgleichung, so genügt

$$\Psi_{\mathfrak{C}}(\vec{x}, t) = i\beta\alpha^2\Psi^*(\vec{x}, t) \tag{3}$$

der Positronen-Diracgleichung (2), wobei in Standarddarstellung

$$i\beta\alpha^2 = i\begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Die in (3) angegebene Abbildung läuft unter dem Begriff *Ladungskonjugation*.

(b) Zeigen Sie: Die Ladungkonjugation eines Neg-ε mit "Spin rauf" liefert[1]

$$\Psi(\vec{x},t) = F \begin{bmatrix} -Gp_z \\ -Gp_+ \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}+\frac{i}{\hbar}Et}}{\sqrt{V}} \mapsto \Psi_{\mathcal{C}}(\vec{x},t) = -F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -Gp_- \\ Gp_z \end{bmatrix} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}-\frac{i}{\hbar}Et}}{\sqrt{V}} \tag{6}$$

kurz: neben Ladungsumkehr auch Impuls-Umkehr, ε-Umkehr, und Spin-Umkehr.

Im Sinne der Löchertheorie: Die Abwesenheit eines Neg-ε, dessen Wellenfunktion durch Ψ gegeben, ist physikalische ununterscheidbar von der Anwesenheit eines Pos-ε, dessen Wellenfunktion durch $\Psi_{\mathcal{C}}$ gegeben.

▷ Aufgabe 3

Gegeben eine Lagrangefunktion

$$L = \frac{i\hbar}{2}(z^*\dot{z} - z\dot{z}^*) - \tilde{f}(z,z^*) \tag{7}$$

worin z komplexe Variable und f reell.

(a) Man bestimme die Euler-Lagrangegleichung zu L. Man überzeuge sich, dass bei Vorgabe von $z(t_0)$ die Zeitentwicklung des Systems vollständig bestimmt ist, es daher redundante dynamische Variable in L gibt (d.h. die Variable $z, z*, \dot{z}, \dot{z}^*$ sind nicht unabhängig).

(b) Man bestimme die Funktion

$$H = \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \dot{z}^*\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*} - L\,, \tag{8}$$

und überzeuge sich insbesondere

$$H = f(z,z^*)\,. \tag{9}$$

Bemerkung: *Wären* die Koordinaten und Geschwindigkeiten, also $z, z^*, \dot{z}, \dot{z}^*$ unabhängig, *wäre* H automatisch die Hamiltonfunktion des Systems. Nun sind die genannten Koordinaten zwar nicht unabhängig, aber H erweist sich dennoch als die "richtige" Hamiltonfunktion. Um das zu sehen, muss man leider ein bisschen rumfummeln. Was in den nächsten Aufgabenteilen geschieht ...

(c) Man setze $z = x+iy$ wo x, y reell, schreibe die Lagrangefunktion (7) in den Variablen $x, y, \dot{x}, \dot{y}$, und eliminiere die $\dot{y}$-Abhängigkeit durch Addition einer geeignet gewählten totalen Zeitableitung, $L'(x,\dot{x},y) = L(x,\dot{x},y,\dot{y}) + \frac{d}{dt}u(x,y)$. Bestimmen Sie $u(x,y)$.

[1] Die diversen Konstanten, zur Erinnerung, lauten:

$$G(\vec{p}) = \frac{c}{E(\vec{p})+mc^2}\,, \quad F(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E(\vec{p})+mc^2}{2E(\vec{p})}}\,, \quad E(\vec{p}) = \sqrt{c^2\vec{p}^2+m^2c^4}\,. \tag{5}$$

(d) Um anschließend auch noch die y-Abhängigkeit los zu werden, stelle man die Euler-Lagrange-Gleichungen zu L' für y auf, löse diese nach y auf, $y = y(x,\dot{x})$, setze die Lösung in L' ein, $L''(x,\dot{x}) = L'(x,\dot{x},y(x,\dot{x}))$, überzeuge sich $\partial L''/\partial\dot{x} = \partial L'/\partial\dot{x}$, insbesondere

$$p \equiv \frac{\partial L''}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 2\hbar y \tag{10}$$

mit $y = y(x,\dot{x})$, bastele sich nach den üblichen Vorschriften die Hamiltonfunktion (hier nun genannt H''), und erfreue sich an (es ist $g(x,y) = f(z,z^*)$)

$$H'' = g(x,y) = g(x,p/(2\hbar))\,. \tag{11}$$

Um sich endgültige Gewissheit zu verschaffen, dass man sich nicht verrechnet hat, sollte man sicherheitshalber noch mal die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu (11) aufstellen, und sich überzeugen, dass sie den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zu L gleichen ...

(e) Die Quantisierung ist nun schnell erledigt: Hüte auf die Variablen, und den kanonischen Kommutator $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ postulieren. Angesichts (10) impliziert der kanonische Kommutator $[\hat{x},\hat{y}] = \frac{i}{2}$, und infolge dessen

$$[\hat{z},\hat{z}^\dagger] = 1\,. \tag{12}$$

Ein flüchtiger Vergleich von (9) mit (11) genügt um zu erkennen: H und H'' sind gleich! Hätte man sich den ganzen Zirkus (c) und (d) also sparen können? Nicht ganz. Ein ebenso flüchtiger Blick lehrt nämlich auch, dass $\partial L/\partial z$ leider kein kanonisch konjugierter Impuls zu z, denn $\left[z,\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right] = \frac{i\hbar}{2}$ (und nicht $i\hbar$ wie es sein sollte).

Bemerkung: Im Gegensatz zu den üblichen Lagrangefuntkionen der klassichen Mechanik ist die vorliegende Lagrangefunktion linear in den Geschwindigkeiten. Von solchem Typ ist auch die Lagrangefunktion der Schrödinger'schen Wellenmechanik und der Diractheorie. Charakteristisch ist dabei, dass nicht – wie hier naiverweise zu erwarten – vier unabhängige Variable vorliegen – etwa z und $\dot{z}$ – sondern nur zwei.