Einführung in die Quantenoptik I

Wintersemester 2017/18
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 1 Ausgabe: 17. Oktober 2017
Eingabe: n.V.

Hinweis. Die Übungsaufgaben sind ein Versuch, verschiedene 'Geschmäcker' zu bedienen: mal geht es um Abschätzungen, Einheiten, Größenordnungen, mal gibt es einiges zu rechnen. Studierende sagen mir häufig, dass schon das Interpretieren des Aufgabentextes Teil der Herausforderung ist. Und dann können Sie noch *soft skills* üben wie das Erstellen von Texten, Recherche von Literatur oder anderer Information im Netz.

Es gilt die Regel: Lassen Sie sich von Fehlern in den angegebenen Formeln nicht verwirren. Im Zweifelsfall fehlt eben im Aufgabentext ein Faktor -1, 2, π, i ...

Aufgabe 1.1 – Typische Feldstärken (8 Punkte)

(i) Übersetzen Sie die Leistung eines Laser-Zeigers in sein elektrisches Feld. Suchen Sie nach "typischen" Zahlen und vergleichen Sie mit dem elektrischen Feld im Inneren eines Atoms. (Der Kern trägt etwa eine Elementarladung, das Feld wird in einem Abstand gesucht, der etwa der Größe des Atoms entspricht.)

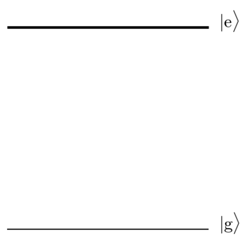
(ii) Suchen Sie nach der Intensität von Sonnenlicht ("Solarkonstante") und schätzen Sie ab, wie groß das elektrische Feld ist. Dazu müssen Sie die Breite des Spektrums abschätzen, grob etwa einmal über den sichtbaren Spektralbereich. Nur eine spektrale Dichte (Einheit $\mathrm{V/m/\sqrt{Hz}}$) ist in diesem Zusammenhang sinnvoll.

(iii) In Experimenten mit scharfen Spitzen ("Feldionenmikroskop") benutzt man den Blitzableiter-Effekt, um hohe elektrische Felder zu erzeugen. Nehmen Sie einmal an, ein infraroter Laser erzeugt auf einer Spitze mit Krümmungsradius $10\,\mathrm{nm}$ eine schwingende Elektronenverteilung mit Flächendichte $1\,e/\mathrm{nm}^2$. Wie groß ist das elektrische Feld bei $10\,\mathrm{nm}$ Abstand von der Oberfläche der Spitze? Bei welcher Frequenz schwingt es? Wenn Sie annehmen, dass die Elektronen pro Periode $20\,\mathrm{nm}$ hin- und herlaufen, wie groß ist ihre Geschwindigkeit? Vergleichen Sie mit der Lichtgeschwindigkeit und der Fermi-Geschwindigkeit in Gold.

Aufgabe 1.2 – Spektrallinien (6 Punkte)

Um 1820 entdeckte Joseph Fraunhofer die Spektrallinien im Sonnenspektrum und erkannte ein Dublett (Linien-Paar) wieder, das er schon in Laborexperimenten beobachtet hatte. Finden Sie heraus, welche Wellenlänge, Frequenz, Photonen-Energie diese D-Linien des Natriums haben. Wie groß ist die “natürliche Linienbreite”? Welche Quantenzahlen können Sie für die beiden Zustände im Natrium-Atom angeben, die bei den Quantensprüngen beteiligt sind, die die Emission auf den D-Linien liefern? Wie groß ist die “natürliche Lebensdauer” der beiden (drei?) Zustände?

Aufgabe 1.3 – Quantendynamik (4 Punkte)



Diese Skizze wird oft für zwei-Niveau-Systeme oder Qbits (q-Bits, Qubits, QBits . . .) verwendet. Man kann sie für verschiedene physikalische Systeme verwenden, und das erzeugt historisch eine Vielfalt von Notation.

(i) Wenn α, β die Wahrscheinlichkeits-Amplituden der beiden Zustände $|\mathrm{g}\rangle$, $|\mathrm{e}\rangle$ ist, schreiben Sie in der bra-ket-Notation à la Dirac eine allgemeine Superposition $|\psi\rangle$ hin.

(ii) Nehmen Sie nun an, dass Ihr System ein Wasserstoff-Atom ist, mit den Energie-Niveaux $|\mathrm{g}\rangle = |1\mathrm{s}\rangle$ und $|\mathrm{e}\rangle = |2\mathrm{p}_z\rangle$. Rechnen Sie für die oben angegebene Superposition den Erwartungswert der z-Koordinate des Elektrons aus: $\langle z\rangle = \langle\psi|z|\psi\rangle$. Schlagen Sie nach, wie die Wellenfunktionen im Wasserstoff-Atom formelmäßig aussehen. Zeigen Sie, dass für $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ der Erwartungswert $\langle z\rangle = 0$ ist. [10 Bonuspunkte]

(iii) Aus der Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung wissen wir, wie die Amplituden α und β sich in der Zeit ändern: $\alpha(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{1\mathrm{s}}t/\hbar}$, analog für β und $E_{2\mathrm{p}} = E_{1\mathrm{s}} + \hbar\omega$. Daraus können Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ zusammen bauen. Zeigen Sie, dass $\langle z(t)\rangle \neq 0$ sein kann und bei der Bohr-Frequenz $\omega/2\pi$ schwingt (“Lyman-α-Linie”). Wie groß müsste nach der klassischen Elektrodynamik die Leistung P sein, die das Elektron abstrahlt? Wenn Sie mit der Regel $P = \hbar\omega\gamma$ eine Rate γ ausrechen, erhalten Sie eine ziemlich genaue Abschätzung für die “natürliche Lebensdauer” $1/\gamma$ des Zustands $|2\mathrm{p}_z\rangle$: femto-Sekunden, nano-Sekunden, Jahre?