

# Einführung in die Quantenoptik I

Wintersemester 2017/18

Carsten Henkel

## Übungsaufgaben Blatt 2

Ausgabe: 09. November 2017

Abgabe: 22. November 2017

30 Punkte, damit Sie ein bisschen 'scheffeln' können. Die formale Hürde liegt trotzdem bei 10 Punkten.

### Aufgabe 2.1 – Atoms and molecules are 'small' (5 Punkte)

(i) Calculate the ratio between the size of your favourite atom and the wavelength of your favourite colour. Formulate in words what this means when this atom is placed in an electromagnetic field of this colour.

(ii) Look up the formulas from QM I that give the 'typical size'  $a_0$  of the hydrogen atom and the wavelength  $\lambda$  of its 'typical' optical transitions. Show that the ratio  $a_0/\lambda$  is of the order of the Sommerfeld fine structure constant  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ .

'Atomic units' where  $\hbar = \hbar^2/m_e = e^2/4\pi\epsilon_0 = 1$  are a useful shortcut.

(iii) The magnetic dipole moments  $\mu$  of 'typical' atoms and molecules are given by the product of an angular momentum or spin and the 'Bohr magneton'. The magnetic interaction energy in a field  $\mathbf{B}$  is given by  $V_m = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ . Look up the definition of the Bohr magneton and show that in a laser beam, the ratio between magnetic and electric interaction energies is of the order of the fine structure constant as well:

$$\frac{V_m}{V_e} \sim \alpha \quad (2.1)$$

Use Maxwell equations to relate electric and magnetic fields of the laser. A plane wave is a useful approximation.

### Aufgabe 2.2 – Resonanznäherung und *rotating frame* (5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir Amplituden  $c_e(t)$  und  $c_g(t)$  für ein zwei-Niveaux-Atom (Energien  $E_e$  und  $E_g$ ) gesucht und die folgende Transformation vorgenommen:

$$c_e(t) = \tilde{c}_e(t) e^{-i(E_g/\hbar + \omega)t} \quad (2.2)$$

$$c_g(t) = \tilde{c}_g(t) e^{-iE_g t/\hbar} \quad (2.3)$$

(1) Welchen Wert für  $\omega$  haben wir verwendet? Diese Wahl entspricht dem 'Wechselwirkungsbild'.

(2) Eine andere Wahl ist der ‘rotating frame’:  $\omega = \omega_L$ , wobei  $\omega_L$  die (Träger-)Frequenz des Laserfelds ist. Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödingergleichung in diesem Bild so aussieht:

$$i\hbar\partial_t\tilde{c}_e(t) = -\hbar\Delta\tilde{c}_e(t) - \mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{E}(t) e^{i\omega_L t}\tilde{c}_g(t) \quad (2.4)$$

wobei  $\Delta$  die Verstimmung ist.

(3) Zeigen Sie, dass in der Resonanznäherung (*rotating wave approximation*) die Atom-Licht-Kopplung nun wie folgt vereinfacht wird:

$$\mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{E}(t) e^{i\omega_L t} \approx \mathbf{d}_{ge} \cdot \mathcal{E}(t) \quad (2.5)$$

wobei die komplexe (‘einhüllende’) Laser-Amplitude  $\mathcal{E}(t)$  sogar zeitunabhängig für einen ‘cw laser’ ist. Skizzieren Sie in Worten die Vorteile dieser Näherung.

### Aufgabe 2.3 – Minimal coupling and long-wavelength approximation (8 Punkte)

For a system of charged particles, the Hamiltonian is given by (look up your electrodynamics lecture)

$$H = \sum_{\alpha} \frac{(\mathbf{p}_{\alpha} - e_{\alpha}\mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}))^2}{2m_{\alpha}} + e_{\alpha}\phi(\mathbf{r}_{\alpha}) \quad (2.6)$$

(i) Focus on a system with a single ‘mobile’ electron where the other charges are described by the (static) charge density  $\rho$ . Show that in the electromagnetic field of a laser, we may use in Eq.(2.6) the potentials

$$\phi = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \phi_L(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) \quad (2.7)$$

(ii) The same formalism is used in quantum mechanics where  $H$  becomes an operator acting on the wave function  $\psi$ . Imagine that an alternative wave function  $\psi'$  is introduced by multiplying with a phase factor (‘unitary transformation’)

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = e^{i\alpha(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

Show that  $\psi'$  solves a different time-dependent Schrödinger equation given by

$$i\hbar\partial_t\psi' = \left( e^{i\alpha(\mathbf{r}, t)} H e^{-i\alpha(\mathbf{r}, t)} \right) \psi' - \hbar\partial_t\alpha(\mathbf{r}, t)\psi' \quad (2.9)$$

(iii) Consider an electron bound around the origin whose orbital has a typical size  $a$  much smaller than the wavelength  $\lambda$  (scale on which  $\phi_L$  and  $\mathbf{A}_L$  vary spatially). Check that with the choice  $\alpha(\mathbf{r}, t) = (e/\hbar) \int^t dt' \phi_L(\mathbf{0}, t') - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_L(\mathbf{0}, t)/\hbar$ , the Schrödinger equation (2.9) takes the approximate form

$$i\hbar\partial_t\psi' = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_C(\mathbf{r}) \right) \psi' - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{0}, t)\psi' + \mathcal{O}(a/\lambda) \quad (2.10)$$

where the Coulomb potential  $V_C$  arises from the first term in the electric potential (2.7).

No guarantee for correct signs.

#### Aufgabe 2.4 – Schrödinger-Gleichung und Entropie (7 Punkte)

In der Vorlesung haben wir zwei Beschreibungen für die Dynamik eines zwei-Niveaux-Atoms kennen gelernt: Ratengleichungen und die Schrödinger-Gleichung. Die beiden haben einen fundamentalen Unterschied: in einem Fall bleibt die Entropie des zwei-Niveaux-Systems erhalten.

(1) Die Entropie in der Quantenmechanik wird seit John von Neumann durch folgende Formel eingeführt:

$$S = - \sum_a p_a \log p_a \quad (2.11)$$

wobei die  $p_a$  die Eigenwerte des sogenannten Dichteoperators  $\rho$  sind und  $\log$  der natürliche Logarithmus. Wir vereinbaren  $\lim_{p \rightarrow 0} p \log p = 0$  (konsistent mit de l'Hôpital). Ist der Zustand durch einen *ket*  $|\psi\rangle$  gegeben, so gilt

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.12)$$

Zeigen Sie, dass  $S(|\psi\rangle) = 0$  ist. Für die Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung gilt dasselbe.

(2) Für ein zwei-Niveaux-System ist der Dichteoperator eine hermitesche  $2 \times 2$ -Matrix von der Form

$$\rho = \begin{pmatrix} p_e & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & p_g \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

wobei  $p_e, p_g$  die Wahrscheinlichkeiten sind, das System im Zustand  $|e\rangle, |g\rangle$  zu finden. Nehmen Sie an, dass die nicht-diagonalen Elemente  $\rho_{eg} = \rho_{ge} = 0$  sind und zeigen Sie, dass die Entropie  $S(p_e, p_g)$  sich unter den Ratengleichungen

$$\partial_t p_e = -(\gamma + BI)p_e + BI p_g \quad (2.14)$$

$$\partial_t p_g = +(\gamma + BI)p_e - BI p_g \quad (2.15)$$

ändert. Welchen stationären Wert für  $S$  finden Sie im Spezialfall  $I = 0$ ?

Sie brauchen für die Aufgabe die Ratengleichungen nicht zu lösen. Bei Interesse führt allerdings ein e-Funktions-Ansatz schnell zum Ziel.