Einführung in die Quantenoptik I

Wintersemester 2017/18
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 3 Ausgabe: 28 Nov 2017
Eingabe: 08 Dez 2017

Aufgabe 3.1 – Checking Bloch numerics (10 Punkte)

On the lecture web site, you can download a *Python* script that solves the Bloch equations numerically. The script uses a workaround to solve complex differential equations. (1) Look into the source code and write down the actual form of the Bloch equations:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\rho_{ee}}{\mathrm{d}t} &= -\gamma\rho_{ee} + \ldots \\ \frac{\mathrm{d}\rho_{ge}}{\mathrm{d}t} &= \ldots \\ \ldots \end{aligned}$$

(Notation: `sigma` $= \langle |g\rangle\langle e| \rangle = \rho_{eg}$.) (2) Imagine that you want to make a "nice plot" to illustrate certain approximations. Split in three groups for the following comparisons:

- applying or not the rotating-wave approximation
- the influence of spontaneous decay on Rabi oscillations
- Bloch vs. rate equations (see lecture)

Each group tries to find suitable parameters and plot in the same figure the results of the Bloch equations and of a suitable alternative calculation. Write a few sentences to tell where are the interesting parts of the figure and print everything. (*Python* can export figures in different formats like .png, .eps, .pdf.)

Aufgabe 3.2 – Quantenzustände eines Zwei-Niveau-Systems (10 Punkte)

Die Bloch-Kugel liefert eine intuitive Vorstellung der Quantenzustände eines Zwei-Niveau-Systems, dargestellt durch Zustände im Hilbertraum oder durch Dichtematrizen. (1) Überlegen Sie, dass man jede hermitesche 2×2-Matrix ρ mit Spur 1 wie folgt zerlegen kann:

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{1} + \sum_i s_i \sigma_i\Big) \qquad (3.1)$$

wobei die σ_i die Pauli-Matrizen sind. Was für Eigenschaften erwarten Sie für die Koeffizienten s_i? (2) Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte der Pauli-Matrizen gerade die Komponenten des Bloch-Vektors s_i ($i = 1, 2, 3$) sind:

$$s_i = \langle \sigma_i \rangle = \mathrm{tr}(\sigma_i \rho) \tag{3.2}$$

Hinweis. Bekannt ist, dass die Pauli-Matrizen Spur 0 haben und die fundamentale Beziehung

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + \mathrm{i} \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k \tag{3.3}$$

erfüllen.

(3) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte p_a von ρ mit der Länge s des Bloch-Vektors zusammenhängen:

$$p_a = 1 \pm s\,, \qquad s^2 = \sum_i s_i^2 \tag{3.4}$$

Folgern Sie, dass reine Zustände auf der Kugelfläche mit Radius 1 liegen und dass dies der "Rand" der Bloch-Kugel ist, weil Zustände mit $s > 1$ unphysikalisch sind. [5 Bonuspunkte:] Zeigen Sie, dass das Quadrat s^2 *nicht* dasselbe ist wie der Erwartungswert von $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$.

(4) Seien $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ zwei (reine) Zustandsvektoren für ein Zwei-Niveau-System mit den Bloch-Vektoren $\{r_i\}$ und $\{s_i\}$. Zeigen Sie, dass für das komplexe Skalarprodukt gilt

$$|\langle \psi | \chi \rangle|^2 = \frac{1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{2}, \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \sum_i r_i s_i \tag{3.5}$$

und beschreiben Sie dieses Ergebnis geometrisch.

Hinweis. Stellen Sie den Projektor $|\psi\rangle\langle\psi|$ über den Blochvektor $\{r_i\}$ dar und drücken Sie das Quadrat des Skalarprodukts durch eine Spur aus.