Einführung in die Quantenoptik I

Wintersemester 2017/18
Carsten Henkel

Übungsaufgaben Blatt 4

Hand out: 12 December 2017
Hand in: 04 January 2018

Weihnachtsfeier
der Fachschaft | 13.12. | 18 Uhr | KuZe Potsdam

Aufgabe 4.1 – Heisenberg-Bild (10 Punkte)

Im Heisenberg-Bild der Quantenmechanik "bewegen" sich die Observablen $\hat{A} = \hat{A}(t)$, während der Zustand $\rho = \rho(0)$ fest ist. (1) Betrachten Sie ein zwei-Niveau-Atom und die Observablen

$$\text{Inversion:} \quad \sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \,, \qquad \sigma = |g\rangle\langle e| \,, \qquad \sigma^\dagger = |e\rangle\langle g| \tag{4.1}$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte von σ_3 und σ in einem reinen Zustand und zeigen Sie, dass das mittlere Dipolmoment eine Linearkombination aus $\langle\sigma\rangle$ und $\langle\sigma^\dagger\rangle$ ist.

(2) Sie haben gelernt, dass die Bewegungsgleichungen (ohne Verluste) von folgender Form sind

$$\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{A}] \,, \tag{4.2}$$

mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}(t)$ und der formalen Lösung

$$\hat{A}(t) = \exp(\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)\hat{A}(0)\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar) \tag{4.3}$$

falls $\hat{H}$ zeitunabhängig ist. Berechnen Sie $\sigma(t)$ aus der Differentialgleichung (4.2) mit $\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_A\sigma_3$ und zeigen Sie, dass $\sigma_3(t) = \sigma_3(0)$.

(3) Betrachten Sie nun einen Operator $\hat{A}$ mit der Eigenschaft

$$[\hat{H}, \hat{A}] = -\hbar\omega_1\hat{A} \tag{4.4}$$

Solche Operatoren haben Sie als "Leiteroperatoren" bereits kennen gelernt. In der Quantenoptik werden sie "Vernichtungsoperatoren" genannt: warum? Zeigen Sie, dass sich ein Vernichter im Heisenberg-Bild bei einer "positiven Frequenz" entwickelt:

$$\hat{A}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\hat{A}(0) \tag{4.5}$$

(4) Für einen harmonischen Oszillator (Auslenkung $\hat{q}$, Impuls $\hat{p}$) sind die Bewegungsgleichungen wohl bekannt (was sind wohl m und k?):

$$\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\hat{p}}{m}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t} = -k\hat{q} \tag{4.6}$$

Bilden Sie die komplexe Linearkombination (welche physikalische Einheit?)

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{k}{2}}\,\hat{q} + \mathrm{i}\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \tag{4.7}$$

und zeigen Sie

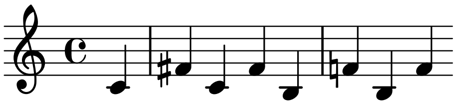
$$\text{(i)} \quad \frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega_1 \hat{A}\,, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.8}$$

$$\text{(ii)} \quad \hat{A}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\hat{A}(0) \tag{4.9}$$

$$\text{(iii)} \quad \hat{A}^\dagger \hat{A} = \frac{k}{2}\hat{q}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} - \mathrm{i}\frac{\omega_1}{2}[\hat{p}, \hat{q}] \tag{4.10}$$

Aufgabe 4.2 – Maria mit dem Kind (5 Punkte)

Sie stehen an der Straße, und Maria fährt auf dem Weg zur Geburtshilfe vorbei:



Wie schnell fährt die Ambulanz? Welches Musical wird (wohl unbewusst) zitiert?

Aufgabe 4.3 – Photonen (5 Punkte)

Suchen Sie nach Antworten auf die Frage “Was ist ein Photon?” Welche experimentellen Befunde werden als Beweis dafür angeführt, dass es Lichtteilchen, genannt Photonen gibt?

Versuchen Sie eine “Erklärung” des photoelektrischen Effekts zu finden, in der keine Photonen vorkommen, sondern nur Wellen und nicht einmal Elektronen als Teilchen.